

1.

- 1a) **20 pontos** Sejam  $m$  e  $n$  inteiros tais que o resto da divisão de  $m$  por 7 é 3 e o resto da divisão de  $n$  por 7 é 4. Isso significa que:

$$m = 7q + 3; \text{ para algum } q \in \mathbb{Z}$$

e

$$n = 7p + 4; \text{ para algum } p \in \mathbb{Z}.$$

Consequentemente,

$$m + n = (7q + 3) + (7p + 4) = 7q + 7p + 1 = 7(p + q + 1).$$

Neste ponto, observemos que  $p + q + 1 \in \mathbb{Z}$ . Logo,  $m + n$  é um múltiplo de 7. Portanto, o resto da divisão de  $m + n$  por 7 é zero.

- 1b) **20 pontos**

Dado que

$$m = 7q + 3; \text{ para algum } q \in \mathbb{Z}$$

e

$$n = 7p + 4; \text{ para algum } p \in \mathbb{Z}.$$

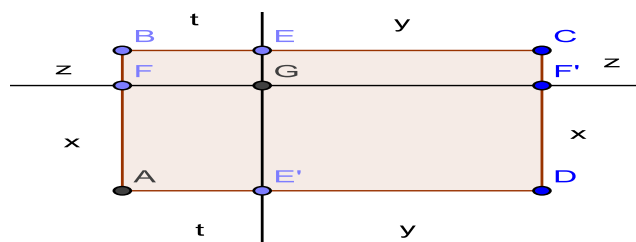
Temos,

$$m \cdot n = (7q + 3) \cdot (7p + 4) = 49pq + 28q + 21p + 12 = 49pq + 28q + 21p + (7 + 5) = 7(7pq + 4q + 3p + 1) + 5$$

Uma vez que  $(7pq + 4q + 3p + 1) \in \mathbb{Z}$ , concluímos que o resto da divisão de  $m \cdot n$  por 7 é igual a 5.

**OBSERVAÇÃO:** Caso o aluno atribua valores específicos a  $m$ ,  $n$  e obtenha os restos nos itens a) e b) corretamente, sugerimos pontuar com 10 pontos.

2. **(40 pontos)** Com base na figura 02, percebe-se que os retângulos de menor e maior perímetro são  $FBEG$  e  $E'GF'D$ , respectivamente.



O enunciado afirma que três dos quatro retângulos possuem perímetros iguais a 11cm, 16cm e 19 cm. Além disso, o outro retângulo possui perímetro maior do que 11cm e menor do que 19cm. Dado  $FBEG$  e  $E'GF'D$  são os retângulos de menor e maior perímetro, respectivamente, então

$$t + t + z + z = 11, \text{ ou seja, } 2t + 2z = 11$$

e

$$y + y + x + x = 19, \text{ ou seja, } 2y + 2x = 19$$

$$\text{Consequentemente, } (2t + 2z) + (2y + 2x) = 30.$$

Portanto, o perímetro do retângulo original,  $ABCD$ , é igual a 30cm.

3.

- 3a) **(05 pontos)** Não. O conjunto  $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$  dos divisores de 12 é tal que  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12 = 12 \cdot 12 \cdot 12 = 12^3 \neq 12^2$ . Isso justifica que 12 não é um número MAGISTRAL.
- 3b) **(15 pontos)** Inicialmente, observemos que se um número  $n$  é produto de exatamente dois primos distintos, então  $n$  é um número magistral. **De fato, Seja  $n$  um número natural tal que  $n = p_1 \cdot p_2$ , sendo  $p_1$  e  $p_2$  primos distintos, neste caso o conjunto  $D(n) = \{1, p_1, p_2, n\}$ , logo  $1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot n = 1 \cdot (p_1 p_2) \cdot n = 1 \cdot n \cdot n = n^2$ . Portanto,  $n$  é magistral.** Assim, de posse do conjuntos dos números primos,  $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, \dots\}$ , podemos obter números magistrais. Logo, são exemplos de inteiros consecutivos que são números magistrais:

$2 \cdot 7 = 14$  e  $3 \cdot 5 = 15$  (exemplos citados);

$3 \cdot 7 = 21$  e  $2 \cdot 11 = 22$ ;

33 e 34;

34 e 35;

38 e 39; etc

- 3c) **(20 pontos)** Na resolução, usaremos o fato de que se  $n = p_1 \cdot p_2$ , sendo  $p_1$  e  $p_2$  números primos diferentes, então  $n$  é um número magistral. Sabe-se que 2 e 53 são números primos, logo  $2 \cdot 53 = 106$  é um número magistral. Na verdade, 106 é o menor número magistral que é maior do que 100. De fato, mostraremos que 101, 102, 103, 104 e 105 não são magistrais. Vejamos que
- $D(101) = \{1, 101\}$ . Além disso,  $1 \cdot 101 = 101 \neq 101^2$ . Logo, 101 não é magistral.
- $D(102) = \{1, 2, 3, 6, 17, 34, 51, 102\}$ . Com isso,  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 17 \cdot 34 \cdot 51 \cdot 102 = (1 \cdot 102)(2 \cdot 51)(3 \cdot 34)(6 \cdot 17) = 102^4 \neq 102^2$ . Logo, 102 não é magistral.
- $D(103) = \{1, 103\}$ . Dado que  $1 \cdot 103 = 103 \neq 103^2$ , concluímos que 103 não é magistral.
- $D(104) = \{1, 2, 4, 8, \dots, 52, 104\}$  possui 16 divisores tais que o produto deles é igual a  $104^8 \neq 104^2$ . Logo, 104 não é magistral.
- Por fim,  $D(105) = \{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105\}$  e  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 15 \cdot 21 \cdot 35 \cdot 105 = 105^4 \neq 105^2$ . Consequentemente, 105 não é magistral.
- Portanto, 106 é o menor magistral que é maior do que 100.

4.

- 4a) **(20 pontos)** Inicialmente, observemos que com um único lápis de cor a pintura da bandeira, segundo as condições impostas, é impossível. Pois, todos os retângulos teriam a mesma cor, situação que não é permitida. Além disso, dispondo de exatamente dois lápis de cor, ao pintar o retângulo horizontal (central) com um destes lápis, deveríamos pintar o retângulo vertical com o outro lápis, impossibilitando a pintura dos outros dois retângulos horizontais (superior e inferior), segundo as condições impostas. Agora, com 3 lápis de cores distintas (por exemplo, verde, azul e laranja) a pintura é possível, pois poderíamos pintar o retângulo central de verde, o retângulo vertical de azul e os outros dois retângulos de laranja.
- Portanto, 3 é o menor número de lápis de cores distintas que necessitamos para pintar a bandeira.
- 4b) **(20 pontos)** Temos 4 opções de cores para pintar o retângulo central; 3 opções de cores para o retângulo vertical; 2 opções para o horizontal superior e 2 opções para o retângulo horizontal inferior. Portanto, o número de modos de pintarmos a bandeira é igual a  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$  modos.

5.

- 5a) **(10 pontos)** Dada a sequência  $(1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2009, 2011)$ , temos  $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100$ . Além disso,  $\sqrt{100} = 10$ , ou seja, 100 possui raiz quadrada inteira e tal raiz é igual a 10.
- 5b) **(15 pontos)** Observemos que

$$S_1 = 1$$

$$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$$

$$S_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

...

$$S_2 = 1 + 3 = 4;$$

$$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16;$$

$$S_6 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36;$$

...

Ao raciocinar de forma indutiva, percebe-se que a soma dos  $n$  primeiros números é igual ao quadrado de  $n$ . Destaque-mos que se  $n$  é par, então  $n^2$  é par. **De fato, se  $n$  é par então  $n = 2k$  para  $k \in \mathbb{N}$ , daí  $n^2 = (2k)^2 = 2k \cdot 2k = 2(2k^2)$  que é par. Por outro lado, se  $n$  é ímpar, então  $n = 2k + 1$  para  $k \in \mathbb{N}$ . Consequentemente,  $(2k + 1)^2 = (2k + 1)(2k + 1) = 4k^2 + 4k + 1 = 4k^2 + 4k + 2 - 1 = 2(2k^2 + 2k + 1) - 1$  que é ímpar.**

- 5c) **(15 pontos)** Aqui usaremos o fato de que a soma dos  $n$  primeiros termos da sequência  $(1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2009, 2011)$  é

igual a  $n^2$ . A adição  $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 2009 + 2011$  possui os  $2012 \div 2 = 1006$  primeiros termos da sequência enunciada, logo

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 2009 + 2011 = 1006^2$$

**Outra solução:** Notemos que  $1 + 3 + 5 + 7 \cdots + 2009 + 2011 = (1 + 2011) + (3 + 2009) + \cdots (1005 + 1007) = 2012 + 2012 + \cdots + 2012$ , onde esta última adição possui  $2012 \div 4 = 503$  parcelas iguais a 2012. Logo,

$$1 + 3 + 5 + 7 \cdots + 2009 + 2011 = (1 + 2011) + (3 + 2009) + \cdots (1005 + 1007) = 2012 + 2012 + \cdots + 2012 = 503 \cdot 2012 = 503 \cdot 2 \cdot 1006 = 1006^2.$$